

Lógica, Lógicas y Logicidad

Lima, Enero 2004

María Manzano

mara@usal.es

Universidad de Salamanca

¿Una Lógica para Dominar a Todas?

Tres pilares sobre los que asentar el edificio
de la Lógica:

1. Teoría de la Prueba

2. Teoría de la Recursión

3. Teoría de Modelos

y

4. un Paraíso cantoriano de Conjuntos en donde construirlo

Siete sistemas lógicos para Filosofía e Inteligencia Artificial:

1. Lógica de segundo orden,

2. Teoría de Tipos,

3. Lógica Modal,

4. Lógica Temporal,

5. Lógica Dinámica,

6. Lógica Parcial

y

7. Lógica Heterogénea.

Nueve familias de cálculos para Informática:

1. cálculos axiomáticos de Hilbert y Frege,
 2. cálculos de cláusulas de Horn,
 3. cálculos de deducción natural,
 4. método de resolución y de tableaux semánticos de Gentzen,
 5. cálculo lambda de Church,
 6. lógicas generales de Goguen y Meseguer,
 7. lógica ecuacional,
 8. lógicas de reescritura
- y
9. sistemas deductivos etiquetados de Gabbay.

Una sola para gobernarlas a todas.

1. Un algoritmo para traducirlas,
2. un cálculo deductivo para demostrar sus teoremas,
3. una semántica multivariada para interpretarlas,
4. una teoría de la correspondencia para arrastrar las metapropiedades de una a otra.
5. Una sola lógica para comprenderlas, pero también para sojuzgarlas en el lugar recóndito en donde reside la "*logicidad*".

EL DEBATE

¿Es la lógica clásica un sistema lógico universal?

¿Qué es un sistema lógico?

Lógica dinámica

- ◀ estructura lógica de los procesos cognitivos
- ◀ inspirada en la lógica dinámica de programas
- ◀ el paso de un estado a otro se produce mediante obtención de información

¿Hemos de incluir a esta nueva lógica dinámica?

Lógica y teoría de juegos

La argumentación puede entenderse como un *juego* cuyas reglas determinan la comunicación civilizada entre los individuos y la toma de decisiones

◀ validez fija estrategias ganadoras en el debate

Recoge

◀ teoría de juegos de la Economía

◀ juegos de Hintikka

◀ juegos de Fraissé

Desarrolla

◀ teoría general de teoría de juegos

¿Incluimos a la lógica de la teoría de juegos aquí?

Lógica con diagramas

Observación

◀ utilidad de los diagramas para la resolución de problemas varios

Se propone

- ◀ investigar las reglas del razonamiento visual
- ◀ crear lógica heterogénea
- ◀ crear lógica diagramática

¿Hay una lógica visual, diagramática?

¿Hemos de incluir el razonamiento heterogéneo?,

¿El exclusivamente diagramático?

Dos programas de investigación

1. Estudiar los sistemas lógicos existentes para desentrañar qué se intentaba resolver con ellos
 - ◀ confiando en que *la logicidad* se halle en las preguntas planteadas, que no en las respuestas
 - ◀ buscar una *invariante lógica*, común a los casos en estudio
 - ◀ proponer unos *universales lógicos*.
 - ◀ crear nuevos sistemas lógicos
2. Estudiar los sistemas lógicos existentes para reducirlos y compararlos
 - ◀ definición provisional de sistema lógico
 - ◀ propiedades matemáticas relación consecuencia
 - ◀ equilibrio entre potencia expresiva y deductiva
 - ◀ recursos matemáticos precisos para su desarrollo
 - ◀ traducibilidad a marco común

Génesis

Punto de partida: clase de modelos $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$

Se introduce:

- ◀ lenguaje adecuado L
- ◀ concepto de verdad de una fórmula φ en un modelo, $\mathcal{A} \models \varphi$
- ◀ teoría de \mathcal{A} , conjunto de todas las fórmulas verdaderas en él $Th(\mathcal{A})$

La lógica es este conjunto VAL ,

$$VAL = \bigcap \{Th(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{K}\}$$

- ◀ Consecuencia semántica $\Gamma \models \varphi$

$$\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Rightarrow (\forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models \gamma) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi))$$

CÁLCULO

◀ Reemplazar consecuencia por deducibilidad, $\Gamma \vdash \varphi$

◀ Teoremas lógicos *THEO*

$$THEO = \{\varphi \mid \vdash \varphi\}$$

◀ Objetivo cubierto: corrección y completud débil

$$THEO = VAL$$

El procedimiento puede ser el inverso:
primero el cálculo y la semántica luego

Definición provisional de Gabbay

Hace falta:

1.- Un lenguaje formal L , incluyendo un alfabeto y una definición de fórmula

2.- Consecuencia como relación binaria entre conjuntos finitos de fórmulas $\Delta \sim \Gamma$ exigiéndole que satisfaga los requisitos de reflexividad, monotonía y corte.

- como deducibilidad \vdash
- como consecuencia semántica \models

3.- Varias maneras:

- se pueden listar los pares $\langle \Delta, \Gamma \rangle$ para los que $\Delta \sim \Gamma$ se verifica
- se pueden proporcionar los pares de conjuntos de fórmulas $\langle \Delta, \Gamma \rangle$ a un programa de un ordenador y esperar la respuesta.

4.- Se puede definir un *modelo* como

$$\text{Modelo} : FORM(L) \longrightarrow \{0, 1\}$$

Una *semántica* S es un conjunto de modelos, junto a la definición de $\Delta \sim \Gamma$ mediante la condición siguiente

$$\forall s \in S [\forall X \in \Delta (s(X) = 1) \rightarrow \exists Y \in \Gamma (s(Y) = 1)]$$

5.- Cálculo deductivo como un procedimiento algorítmico para generar \sim que usa reglas de la forma

$$\frac{\Delta_1 \sim \Gamma_1; \dots; \Delta_n \sim \Gamma_n}{\Delta \sim \Gamma}$$

y axiomas de la forma

$$\frac{\emptyset}{\Delta \sim \Gamma}$$

Propiedades matemáticas de \sim

¿Qué propiedades matemáticas poseen dichas lógicas?

La relación clásica de consecuencia y la de los sistemas que la extienden cumple:

1.- $\Delta \sim A$, si $A \in \Delta$ (*reflexividad*)

2.- $\Delta \sim A \implies \Delta, \Delta' \sim A$ (*monotonía*)

3.- $\Delta \sim B$; $\Delta, B \sim A \implies \Delta \sim A$ (*corte*)

Equilibrio entre propiedades

Lógica como balanza:

- cálculo deductivo, se evalúan las *características computacionales*
- semántica, su *capacidad expresiva*.

¿Dónde está el fiel de la lógica que estudiamos?

Recursos matemáticos utilizados

¿Qué supuestos conceptuales hemos tenido que asumir?

¿Cuánta teoría de conjuntos?

Traducción

Puentes entre lógicas

- ▶ establecer correspondencias
- ▶ traducciones
- ▶ morfismos.

El concepto de traducción debe también ser clarificado.

- máquinas de Turing
- gödelización
- teoría de conjuntos
- cláusulas de Horn

¿Es suficiente?

¿Qué es una traducción?

Marco unificador

Mi objetivo es mostrar que la lógica clásica, si como tal incluimos a la multivariada o heterogénea, puede usarse como sistema universal, especialmente desde el punto de vista de la teoría de la prueba. Sin embargo, puesto que hay otros planteamientos globalizadores, expondremos dos de ellos para apreciar la conmensurabilidad de paradigmas.

Reducción de otras lógicas a la multivariada

OBJETIVOS

- Usar un sólo cálculo deductivo (probador de teoremas)
- Arrastrar metapropiedades desde MSL
- Comparar lógicas

Traducción de *XL* a *MSL*

- Traducción de fórmulas
- Conversión de estructuras
- Definición de teoría

Tres niveles, o etapas:

- representación: *teorema de enumerabilidad*
- equivalencia se extiende al concepto de consecuencia: *compacidad y Löwenheim-Skolem*
- equivalencia de cálculos

Lógica multivariada y parcial

- Sistema lógico no totalmente desarrollado:
Prelógica XL
- Hay que construir también el marco

Construcción de *PHL*

- Lenguaje
- Semántica multivariada y parcial
- Cálculo deductivo tipo Gentzen

Traducción de *XL* a *PHL*

- Traducción de fórmulas
- Conversión de estructuras
- Definición de teoría Δ

La novedad del planteamiento es que ahora, mediante un proceso de *retrotraducción* vamos a definir una nueva lógica parcial *PXL* que será la que sustituya a la original *XL*.

Lógicas Generales

Estudio axiomático de diferentes elementos de las lógicas y de sus interrelaciones

Sistema implicativo como una tripla ordenada

$$\mathcal{E} = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \vdash \rangle$$

Una institución es una cuádrupla

$$I = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \text{Mod}, \Vdash \rangle$$

CENTRAL: Las propiedades más fecundas de un sistema lógico o de una estructura matemática no residen en ellos mismos, sino en su interrelación (*mapas*) con sistemas o estructuras similares.

En consonancia con esta *filosofía*, una lógica marco \mathfrak{F} será aquella capaz de representar a muchas otras y ello se concreta en el establecimiento de mapas de las lógicas en estudio a \mathfrak{F} . La lógica clásica es un marco en este nuevo sentido

Sistemas Deductivos Etiquetados

TESIS:

Lógica clásica puede usarse como sistema universal

Idea + revolucionaria: la diferencia entre sistemas reside en el metalenguaje (teoría de la prueba o semántica)

Marco general = lógica en la que las peculiaridades metalingüísticas se cifrasen en el lenguaje objeto, para ser recogidos en un cálculo.

LDS

- Lógica: $\langle \sim, S_{\sim} \rangle$ donde \sim es una relación de consecuencia estructurada sobre un lenguaje L y S_{\sim} es un *LDS*.
- Sistema *LDS*: $\langle L, A, M \rangle$ donde L es un lenguaje lógico, A es un álgebra de etiquetas y M es la disciplina de etiquetado de fórmulas de la lógica.

Para apoyar su tesis se propone hacer dos cosas:

1. Mostrar que casi cualquier sistema lógico puede presentarse de forma natural como *LDS*. De hecho, algunas lógicas poseen requisitos funcionales que sólo se explicitan —y reciben mejor tratamiento— al ser traducidas
2. *LDS* se traduce a lógica clásica de forma natural

Semántica sintáctica

*¿Qué se necesita para establecer de manera meramente sintáctica las características de la semántica?
¿Qué reemplazará a los modelos, a las interpretaciones, al propio concepto de completud?*

Su respuesta es que una buena traducción entre lógicas suple a la semántica. Podemos prescindir de la semántica entendida en los términos de la teoría de modelos.

CONCLUSIONES

Reducción a lógica multivariada

El *espíritu* de la correspondencia que se establece es *semántico*.

Se consigue

- una unificación del “*lenguaje máquina*”
- mantenemos los diversos lenguajes como “*lenguaje de usuario*”

Otros planteamientos unificadores

Se han estudiado otros planteamientos unificadores

1. Lógicas generales: análisis *supraestructural*, toda lógica se reescribe como clásica
2. Sistemas deductivos etiquetados: maquinaria *sintáctica*, se traduce a clásica

No deja de ser curioso que tanto cuando se utilizan en la traducción criterios *semánticos*, como cuando son *supraestructurales* o *sintácticos* el resultado obtenido sea el mismo.

¿No será que la “logicidad” equivale a la traducibilidad a lógica clásica?